ресных свойств.

Теорема 4. Если направление ω^a сопряженной к-ткани на поверхности $V_{p,k}\subset P_n$ имеет индекс I,то на касательной AA_a к этому направлению инвариантно определяются $p-k$ точек $\mathcal{F}^e_a$ -псевдофокусов,соответствующих смещениям точки A в направлении ω^e ($e=1,2,\dots,k$), и на поверхности возникает частично сопряженная сеть,содержащая данную сопряжённую к-ткань.

Теорема 5. Если индекс линии ω^a сопряжённой к-ткани на поверхности $V_{p,k}\subset P_n$ равен 1,то на касательной к ней гармонический полюс точки A относительно псевдофокусов совпадает с гармоническим полюсом точки A относительно фокусов [1].

Теорема 6. Если в условиях теоремы 4 сопряжённая к-ткань имеет ось,то в аффинной связности,индуцированной заданием поля нормали первого рода [1] ,содержащего поле осей,линии сопряженной к-ткани будут геодезическими.

Список литературы

I. Базылев В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства.-Изв.высш.учеб.заведений.Математика, 1966,№2,с.9-19.

2. Базылев В.Т. Квазилапласовы преобразования p-мерных поверхностей n-мерного проективного пространства.-Ученые записки МГПИ им.В.П.Потёмкина,1955,35,с.261-322.

3. Гейдельман Р.М. О поверхностях,несущих сопряжённые к-ткани.-Изв.высш.учеб.заведений.Математика,1976,№11,с.101-10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.I2 1981

Т.А.Дулалаева

К ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_n

В работе рассматривается пара гиперраспределений в n-мерном проективном пространстве и изучается геометрия этой пары.

I.О п р е д е л е н и е. Пусть в проективном пространстве P_n заданы: I/две диффеоморфные области Ω и $\bar\Omega$,2/ $(n-1)$-распределения Δ в области Ω и $\bar\Delta$ в области $\bar\Omega$,3/диффеоморфизм $f:\Omega\to\bar\Omega$ такой,что $f(A)\notin\Delta(A)$, $\forall A\in\Omega$ и $f^{-1}(B)\notin\bar\Delta(B), \forall B\in\bar\Omega$.Тогда мы скажем,что в пространстве P_n задана пара гиперраспределений $\{\Delta,\bar\Delta\}$.

Присоединим к паре областей $\Omega,\bar\Omega$ подвижные проективные реперы $R=\{A,A_i,A_n\}$ и $\bar R=\{A_n,A_i,A\}$,где $A\in\Omega$, $A_n=f(A)\in\bar\Omega$, $A_i\in\Delta(A)\cap\bar\Delta(A_n)$ $(i,j,k=\overline{1,n-1})$.

Имеем:

$$dA=\omega_0^0A+\omega^iA_i+\omega^nA_n,\quad dA_n=\theta_0^0A_n+\theta^iA_i+\theta^nA,$$
$$dA_i=\omega_i^0A+\omega_i^jA_j+\omega_i^nA_n,\quad dA_i=\theta_i^0A_n+\theta_i^jA_j+\theta_i^nA, \qquad (1)$$
$$dA_n=\omega_n^0A+\omega_n^iA_i+\omega_n^nA_n,\quad dA=\theta_n^0A_n+\theta_n^iA_i+\theta_n^nA.$$

Дифференциальные уравнения,определяющие пару гиперраспределений $\{\Delta,\bar\Delta\}$,имеют вид:

$$\omega_i^n=L_{i\alpha}\omega^\alpha,\qquad \theta_i^n=\bar L_{i\alpha}\theta^\alpha, \qquad (2)$$

$$\theta^\alpha=\Lambda^\alpha_\beta\omega^\beta,\qquad (\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n}). \qquad (3)$$

Продолжая систему уравнений(2),мы убеждаемся,что системы функций $\{L_{ij},L_{in}\},\{\bar L_{ij},\bar L_{in}\}$ определяют геометрические объекты,названные [2] фундаментальными объектами первого порядка гиперраспределений Δ , $\bar{\Delta}$ соответственно. Функции L_{ij}, L_{in}, $\bar{L}_{ij}$, $\bar{L}_{in}$ образуют самостоятельные объекты-фундаментальные подобъекты первого порядка гиперраспределений. Подобъекты L_{ij}, $\bar{L}_{ij}$ являются тензорами, в общем случае несимметричными по своим индексам. Тензоры $H_{ij}=\frac{1}{2}(L_{ij}-L_{ji})$, $\bar{H}_{ij}=\frac{1}{2}(\bar{L}_{ij}-\bar{L}_{ji})$ называют тензорами неголономности гиперраспределений Δ и $\bar{\Delta}$.

Продолжая уравнения (3), получим систему дифференциальных уравнений геометрического объекта Λ^{α}_{β} , названного [3] фундаментальным объектом первого порядка, порожденным отображением f . Функции Λ^{j}_{i}, Λ^{i}_{n}, Λ^{n}_{i} образуют самостоятельные объекты-фундаментальные подобъекты первого порядка отображения f . Функция Λ^{n}_{n} является относительным инвариантом диффеоморфизма f .

2. Пусть ℓ -произвольная гладкая линия, принадлежащая распределению Δ , система дифференциальных уравнений которой есть $\omega^{i}=\ell^{i}\theta$, $\omega^{n}=0$ [1]. Аналогично, на линиях, принадлежащих распределению $\bar{\Delta}$, выполняются уравнения $\theta^{i}=\bar{\ell}^{i}\bar{\theta}$, $\theta^{n}=0$.

Линии ℓ в отображении f соответствует линия, дифференциальные уравнения которой имеют вид $\theta^{i}=\Lambda^{i}_{j}\ell^{j}\theta$, $\theta^{n}=\Lambda^{n}_{i}\ell^{i}\theta$. Эта линия принадлежит распределению $\bar{\Delta}$ в том и только в том случае, если выполняется равенство $\Lambda^{n}_{i}\ell^{i}=0$.

О п р е д е л е н и е. Линию ℓ , как и линию $f(\ell)$, назовем линией пары гиперраспределений $\{\Delta,\bar{\Delta}\}$, если $\ell\subset\Delta$ и $f(\ell)\subset\bar{\Delta}$.

Пусть любая линия гиперраспределения Δ является линией пары гиперраспределений $\{\Delta,\bar{\Delta}\}$. Тогда $\Lambda^{n}_{i}=0$. Это означает соответствие площадок гиперраспределений $\Delta(A)$ и $\bar{\Delta}(A_n)$ в индуцированном отображении f_* , т.е. $f_*(\Delta(A))=\bar{\Delta}(A_n)$. Верно и обратное утверждение.

Т е о р е м а. Гиперраспределение $\bar{\Delta}$ является образом гиперраспределения Δ в индуцированном отображении f_* в том и только в том случае, когда геометрический объект Λ^{n}_{i} тождественно равен нулю.

3. Рассмотрим линию, касающуюся нормали (AA_n) в точке A . Она определяется системой уравнений

$$\omega^{i}=0, \quad \omega^{n}=\ell^{n}\theta.$$

Образ этой линии в отображении f есть линия, уравнения которой имеют вид: $\theta^{i}=\Lambda^{i}_{n}\ell^{n}\theta$, $\theta^{n}=\Lambda^{n}_{n}\ell^{n}\theta$.

Тождественное обращение в нуль геометрического объекта Λ^{i}_{n} означает, что линия (4) и ее образ в отображении f являются прямыми линиями.

4. Рассмотрим поле гиперквадрик, каждая из которых определена своим уравнением $A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}x^{\bar{\alpha}}x^{\bar{\beta}}=0$ относительно локального репера R $(\bar{\alpha},\bar{\beta}=0,1,\dots,n)$. Из системы дифференциальных уравнений поля гиперквадрик заключаем, что A_{00}, A_{0n}, A_{nn} -относительные инварианты.

Потребуем, чтобы гиперквадрика рассматриваемого поля, соответствующая точкам A и A_n, касалась пары гиперраспределений $\{\Delta,\bar{\Delta}\}$ в этих точках. Это приводит к соотношениям: $A_{00}=0$, $A_{nn}=0$, $A_{i0}=A_{in}=0$. Пронормируем коэффициенты, положив $A_{0n}=-1$. В силу этих соотношений получим: $dA_{ij}=A_{ik}\omega^{k}_{j}+A_{jk}\omega^{k}_{i}+A_{ij}(\omega^{0}_{0}+\omega^{n}_{n})+A_{ij\alpha}\omega^{\alpha}$.

Потребуем далее, чтобы наши гиперквадрики были не только касательными к паре распределений $\{\Delta,\bar{\Delta}\}$, но и соприкасающимися.

Уравнение соприкасающейся гиперквадрики пары гиперраспределений $\{\Delta,\bar{\Delta}\}$ имеет вид:

$$a_{ij}x^{i}x^{j}-2x^{0}x^{n}=0 \tag{5}$$

при условии $a_{ij}=\bar{a}_{ij}$.

Т е о р е м а. Существует и притом единственное поле соприкасающихся гиперквадрик пары гиперраспределений $\{\Delta,\bar{\Delta}\}$ в пространстве P_n тогда и только тогда, когда $a_{ij}=\bar{a}_{ij}$.

Плоскость $\Delta(A)\cap\bar{\Delta}(A_n)$ пересекает конусы асимптотических направлений, ассоциированные с текущими элементами распределений Δ, $\bar{\Delta}$ по кривым второго порядка

$$Q:\ a_{ij}x^{i}x^{j}=0,\ x^{0}=0,\ x^{n}=0;$$

$$\bar{Q}: \ \bar{a}_{ij}\, x^i x^j = 0, \quad x^0 = 0, \quad x^n = 0.$$

Т е о р е м а. Если пара гиперраспределений $\{\Delta, \bar{\Delta}\}$ имеет общую соприкасающуюся гиперквадрику, то конусы асимптотических направлений, ассоциированные с текущими элементами распределений $\Delta, \bar{\Delta}$ соответственно, пересекаются в плоскости $\Delta(A) \cap \bar{\Delta}(A)$ по одной кривой второго порядка.

Т е о р е м а I. Необходимым и достаточным условием соответствия в проективитете Бомпьяни-Пантази, определяемом распределением Δ, нормалей I рода (AA_n) и II рода $\Delta(A) \cap \bar{\Delta}(A_n)$ является тождественное обращение в нуль геометрического объекта L_{in}.

Т е о р е м а II. Необходимым и достаточным условием соответствия в проективитете Бомпьяни-Пантази, определяемом распределением $\bar{\Delta}$, нормалей I рода (AA_n) и II рода $\Delta(A) \cap \bar{\Delta}(A_n)$ является тождественное обращение в нуль геометрического объекта $\bar{L}_{in}$.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Распределение касательных элементов.-Тр. Геометр. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1971, т.3, с.29-48.

2. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов.-Тр. Геометр. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1973, т.4, 71-120.

3. О с т и а н у Н.М., Рыжков В.В., Швейкин. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.-Тр. Геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1973, т.4, с.7-70.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I2 1981

В.А.Е с и н

О СОПРЯЖЕННЫХ И ОРТОГОНАЛЬНЫХ СЕТЯХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА

В предлагаемой работе рассматривается гиперсферическое изображение поверхности V_p евклидова пространства E_{p+2} с помощью единичного вектора средней нормали. Используя эту конструкцию, рассматриваются сопряженные и ортогональные сети на p-поверхностях пространства E_{p+2}.

Отнесем поверхность $V_p \subset E_{p+2}$ к реперу $R = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha)$, $(i,j,k,\ell = 1,\dots,p;\ \alpha,\beta = p+1, p+2)$, где орты $\vec{e}_i$ -касательные к линиям заданной сети $\Sigma_p \subset V_p$, $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис в нормальной плоскости $N_\alpha(x)$, причем $\vec{e}_{p+2}$ коллинеарен вектору средней нормали $\vec{M}$.

Продолжая дважды систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений нашей поверхности, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha,$$

$$\Delta b_{ij}^\alpha = d b_{ij}^\alpha - b_{ik}^\alpha \omega_j^k - b_{kj}^\alpha \omega_i^k + b_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha = b_{ijk}^\alpha \omega^k,$$

где b_{ijk}^α симметричны по нижним индексам.

Так как $\vec{M} \parallel \vec{e}_{p+2}$, то $\gamma^{ij} b_{ij}^{p+2} = 0$.

Дифференцируя это тождество, находим $\omega_{p+2}^{p+1} = \eta_i \omega^i$, где $\eta_k = \dfrac{\gamma^{ij} b_{ijk}^{p+1}}{\gamma^{ij} b_{ij}^{p+2}}$.

Будем рассматривать гиперсферическое изображение $\tilde{V}_p$ поверхности V_p с помощью единичного вектора средней нормали. Имеем

$$d\vec{e}_{p+2} = \vec{a}_i \omega^i,$$